ΚΑΘΕ ΝΟΡΜΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕΤΡΙΚΗ

Ευκλειδεια μετρική (αποστασης)

$$d(\bar{x},\bar{y}) := |\bar{x}-\bar{y}|, \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^{\nu}$$

<u>Απόδειξη</u> ανισότητας $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ (Cauchy-Schwarz)

Γνωρίζουμε από Cauchy-Schwarz.

(α) Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ γραμμικά εξαρτημένα

(δηλ. $\exists (a,\beta) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\} : a\bar{x} + \beta\bar{y} = \bar{0}$)

Ειδικότερα χωρίς βλάβη της γενικότητας

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \bar{x} = \lambda\bar{y}$.

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}| = |(\lambda\bar{x})\cdot\bar{x}| = |\lambda|\,\|\bar{y}\|^2 = |\lambda|\cdot\|\bar{y}\|\cdot\|\bar{y}\| =$$

$$= \|\lambda\bar{y}\|\cdot\|\bar{y}\| = \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$$

(β) Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ γραμμικά ανεξάρτητα

Ειδικότερα $\bar{x} \neq \lambda\bar{y}, \forall\lambda\in\mathbb{R} \iff \lambda\bar{y} - \bar{x} = 0, \forall\lambda\in\mathbb{R} \iff$

$\iff \|\lambda\bar{y} - \bar{x}\| > 0, \forall\lambda\in\mathbb{R} \iff 0 < \|\lambda\bar{y} - \bar{x}\|^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\lambda\bar{y}-\bar{x})\cdot(\lambda\bar{y}-\bar{x}) > 0, \ \forall\lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\bar{y}(\lambda\bar{y}-\bar{x}) - \bar{x}(\lambda\bar{y}-\bar{x}) > 0, \ \forall\lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda\bar{y})(\lambda\bar{y}) - (\lambda\bar{y})\bar{x} - \bar{x}(\lambda\bar{y}) + \bar{x}\cdot\bar{x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\|\bar{y}\|^2 - 2\lambda\bar{x}\bar{y} + \|\bar{x}\|^2 > 0, \ \lambda\in\mathbb{R}$

Δηλαδή $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\bar{x}\cdot\bar{y})^2 - 4\|\bar{y}\|^2\cdot\|\bar{x}\|^2 < 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 4|\bar{x}\cdot\bar{y}|^2 - 4\|\bar{y}\|^2\cdot\|\bar{x}\|^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| < \|\bar{y}\|\cdot\|\bar{x}\|$

Άρα, η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει και για (α) αλλά και για (β).

Απόδειξη (τριγωνικής ανισότητας από την προηγούμενη σελίδα)

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|, \ \forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 \le (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2 = \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) \le \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\bar{x}\cdot\bar{y} \le \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2$

$\Leftrightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (για το σπίτι, εύκολες, επανάληψη ορισμού)

1) ΝΔΟ: $\forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n: 2\|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 + \|\bar{x}-\bar{y}\|^2$

να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία

2) $\forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$: νδο. $4\bar{x}\cdot\bar{y} = \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 - \|\bar{x}-\bar{y}\|^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ:)

- $\forall\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in\mathbb{R}^n$ ισχύει $|x_i| \le \|\bar{x}\|, \ i=1,2,\dots,n$

  όπου $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \ i=1,2,\dots,n$

  ΔΗΛΑΔΗ συνεπάγεται ότι:

  $\max\{|x_i|, i=1,2,\dots,n\} \le \|\bar{x}\| \Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\|$

- Εάν έχουμε 2 διανύσματα $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x}\|\neq 0, \|\bar{y}\|\neq 0$ τότε ορίζεται:

  $$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}$$, όπου θ η γωνία των $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$.

ΓΕΝΙΚΑ:

Το διανυσμα $\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$ εχει συντεταγμενες

$$\left(\frac{x_1}{\|\overline{x}\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\overline{x}_n\|}\right)$$

και Νορμα:

$$\left\|\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\|\overline{x}\|}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\|\overline{x}\|^2} = \frac{1}{\|\overline{x}\|^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 =$$

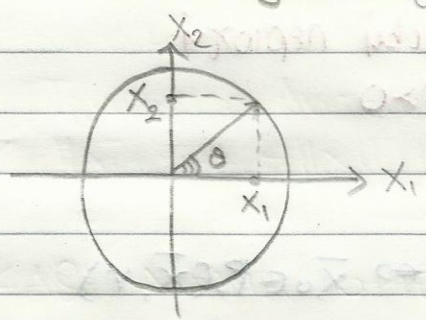
$$= \frac{1}{\cancel{\|\overline{x}\|^2}} \cdot \cancel{\|\overline{x}\|^2} = 1$$

Πιο συγκεκριμένα για $n=2$.

πχ

Εστω $\|\overline{x}\|=1$, $\|\overline{y}\|=1$ και $\cos\theta = \overline{x}\cdot\overline{y}$

καθώς $\overline{y}=\overline{e}_1=(1,0)$. τοτε $\cos\theta = \overline{x}\cdot\overline{e}_1 = x_1$



Υποπαρατηρηση:

Στο παραπανω πχ ισχυει $x_1^2 + x_2^2 = \|\overline{x}\|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

- Εαν $\overline{x}\in\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ το συνολο $\{\lambda\overline{x} : \lambda\in\mathbb{R}\}$ περιγραφει μια ευθεια που διερχεται απο το $\overline{0}=(0,0,\dots,0)$
  Αντιστοιχα εαν $\overline{x},\overline{y}$ γραμ. ανεξαρτ., τότε
  $\{\lambda\overline{x}+\mu\overline{y} : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ είναι το επιπεδο που περιέχει τα $\overline{x}$ και $\overline{y}$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

καθε νορμα ορίζεται μετρική στον $\mathbb{R}^n$

οπου: $d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\| \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$

και λεγεται ευκλειδεια μετρική

όπου ειδικοτερα $d(\bar{x},\bar{0}) = \|\bar{x}-\bar{0}\| = \|\bar{x}\|$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η d θα λεγεται μετρική

α) $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

$\left(\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|-(\bar{y}-\bar{x})\| = \|\bar{y}-\bar{x}\| \right)$

β) $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ και η ισοτητα ισχυει αν και μονο αν $\bar{x}-\bar{y}=0$

$\left(\|\bar{x}-\bar{y}\| \geq 0, \ \forall x,y \in \mathbb{R} \right)$

γ) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

(δλδ $\|\bar{x}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$

εστω $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{x}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$)

▸ Ανοικτή μπαλα (Ball) ή Ανοικτή σφαιρική περιοχή στον $\mathbb{R}^n$ με κεντρο $\bar{x}_0$ και ακτίνα $r>0$

$B(\bar{x}_0, r) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < r \}$

δηλ. $\|\bar{x}-\bar{x}_0\| < r \Leftrightarrow \bar{x} \in B(\bar{x}_0, r) \Leftrightarrow \bar{x}_0 \in B(\bar{x}, r)$

$B((0,0), r) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < r \} = \{ \sqrt{x^2+y^2} < r \} =$

$= \{ x^2+y^2 < r^2 \}$

δηλ. ο κυκλικος δισκος ακτινας $r>0$ και κεντρου $(0,0)$ [οταν $r=1$, μιλαμε για τον μοναδιαιο κυκλικο δισκο]

▸ Η κλειστή μπαλα κεντρου $\bar{x}_0$ και $r>0$ στον $\mathbb{R}^n$ θα γραφεται:

$\overline{B}(\bar{x}_0, r) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| \leq r \}$